SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. NEGRINI

CAPACITA' E CRITERIO DI WIENER PER UNA CLASSE DI OPERATORI ELLITTICI DEGENERI

28 GENNAIO 1988

In questo seminario esporremo alcuni risultati relativi al problema di Dirichlet per operatori ellittici degeneri della forma

(1) $$L = \sum_{j=1}^{\nu} X_j^2 \qquad \text{in } \Omega_0 \subseteq R^n$$

in cui $X_1 \dots X_\nu$ sono operatori del 1° ordine a coefficienti C^∞. Facciamo le seguenti ipotesi:

1) L è *non totalmente degenere* in ogni punto di Ω_0 (ovvero, i coefficienti della parte principale di L non sono mai simultaneamente nulli, in alcun punto di Ω_0.

2) L'algebra di Lie generata da $X_1 \dots X_\nu$ ha rango n in ogni punto di Ω_0.

3) Esistono θ, θ^* $C^2(\Omega_0,R)$ tali che $\theta, \theta^* > 0$ in Ω_0, $L\theta < 0$, $L^*\theta^* < 0$ in Ω_0, essendo L^* l'aggiunto formale di L. Questa ipotesi serve essenzialmente per avere il principio di minimo, indispensabile per poter studiare L con metodi di teoria del potenziale.

Uno strumento essenziale per lo studio di L è la distanza "riemanniana" legata a L, definita nel modo seguente:

sia γ: $[0,T] \to \Omega_0$ una curva regolare a tratti; γ si dice *X-ammissibile* se ciascun tratto C^1 di γ è curva integrale di uno dei campi $\pm X_1 \dots \pm X_\nu$. Si pone $\ell(\gamma) = T$; e, se x,y Ω_0, $d(x,y) = \inf$ $\ell(\gamma)$: γ è X-ammissibile e congiunge x e y}.

La definizione e le proprietà di d sono state studiate da Fefferman e Phong e Nagel-Stein-Waniger [N-S-W]. La d genera in Ω_0 la stessa topologia della distanza euclidea, ma <u>non</u> è, in generale, equivalente a quest'ultima. Una proprietà di d, di fondamentale importanza per il nostro studio, è la PROPRIETA' DI DUPLICAZIONE per la misura (di Lebesgue, indicata $|\cdot|$) delle d-sfere: ESISTE $C>0$, INDIPENDENTE DA r, TALE CHE:

(2) $$|S(x,2r)| \leq C\ |S(x,r)|$$

(vedi [N-S-W]).

Sia Σ un aperto limitato, $\bar{\Sigma} \subseteq \Omega_0$, dotato di funzione di Green g per l'operatore L; tramite la d si può dare una stima molto precisa di g:

$$(3) \qquad g(x,y) \sim \frac{d^2(x,y)}{|S(x,d(x,y))|}$$

per tutti gli (x,y) di un intorno della diagonale di $\Sigma \times \Sigma$ (vedi [N-S-W] ; [S-C]).

Sfruttando la (3), io e Scornazzani [N-S] abbiamo dimostrato il CRITERIO DI WIENER, che caratterizza i punti regolari per il problema di Dirichlet per L. In questo seminario esporrò alcune varianti del criterio di Wiener, tra cui una presentazione dello stesso in forma integrale; tali fatti costituiscono l'oggetto del lavoro [N].

Diamo alcune definizioni. Sia F compatto, $F \ \Sigma$, chiamiamo CAPACITA' di F il numero reale ≥ 0

$$(4) \qquad \mathscr{C}(F) = \sup\{\mu(F) | \mu \in M^+(F) \ ; \ G\mu \leq \text{ in } \Sigma\}$$

(più avanti, vedremo altre due definizioni equivalenti della "capacità").

Fissato $\lambda \ \ ]0,1[$ definiamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$(5) \qquad \Omega'_k = \{x \in \Omega' | \ \lambda^{k+1} \leq d(x,y) \leq \lambda^k\}$$

$$(6) \qquad P'_k = \{x \in \Omega' | \ d(x,y) \leq \lambda^k\}$$

Infine, per $\rho > 0$, definiamo:

(7) $$Q'_\rho = \{x \in \Omega' \mid d(x,y) \leq \rho\}$$

<u>Teorema.</u> (Criterio di Wiener). Sono equivalenti le affermazioni:

a) y è L-regolare per Ω

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\,\mathscr{C}(\Omega'_k)}{|S(y,\lambda^k)|} = +\infty$ per un λ (o per ogni λ) $\in\,]0,1[$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}\,\mathscr{C}(P'_k)}{|S(y,\lambda^k)|} = +\infty$ " " "

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\rho^2}{|S(y,\rho)|}\,\mathscr{C}(Q'_\rho)\,\frac{d\rho}{\rho} = +\infty$

<u>Dimostrazione</u>. La equivalenza a $\Leftrightarrow$ b è contenuta in [N], ed è stata esposta nell'ambito di questi Seminari (7 marzo 1985); dimostriamo qui l'equivalenza tra le serie (b) e (c) e l'integrale (d).

Poiché $\Omega'_k \subseteq P'_k$, la (c) è maggiorante di (b); cerchiamo dunque una stima dei termini di (c) mediante quelli di (b).

Risulta $P'_k = P'_{k+1} \cup \Omega'_k$: perciò

$\mathscr{C}(P'_k) \leq \mathscr{C}(P'_{k+1}) + \mathscr{C}(\Omega'_k)$ (sub-additività di $\mathscr{C}$) e quindi

$\mathscr{C}(\Omega'_k) \geq \mathscr{C}(P'_k) - \mathscr{C}(P'_{k-1})$. Allora

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^{2k}\,\mathscr{C}(\Omega'_k)}{|S(y,\lambda^k)|} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^{2k}}{|S(y,\lambda^k)|}\left(\mathscr{C}(P'_k) - \mathscr{C}(P'_{k+1})\right)$$

Mediante una "sommazione per parti", quest'ultima somma diventa:

$$\frac{1}{|S(y,1)|}\mathscr{C}(P'_o) - \underbrace{\frac{\lambda^{2m}}{|S(y,\lambda^m)|}\mathscr{C}(P'_{m+1})}_{*} + \sum_{k=1}^{m}\mathscr{C}(P'_k)\left(\frac{\lambda^{2k}}{|S(y,\lambda^k)|} - \frac{\lambda^{2k-2}}{|S(y,\lambda^{k-1})|}\right)$$

Tenendo presente che $\mathscr{C}(S(y,r)) \sim \frac{|S(y,r)|}{r^2}$ (vedi [N-S]), il termine sottolineato (*) è limitato al variare di m; per cui esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{2k}\mathscr{C}(\Omega'_k)}{|S(y,\lambda^k)|} \geq C + \sum_{k=1}^{m}\mathscr{C}(P'_k)\frac{\lambda^{2k}}{S(y,\lambda^k)|}\left(1 - \frac{|S(y,\lambda^k)|}{\lambda^2|S(y,\lambda^{k-1})|}\right.$$

A questo punto, sfruttando una stima esplicita per la misura delle d-sfere di centro fissato, (vedi [N-S-W])

$$(8) \qquad |S(y,r)| \sim \sum_{j=1}^{q} \ell_j\, r^{dj}$$

in cui ℓ_j e d_j e q dipendono da y, ma non da r, si riesce a far vedere che la quantità $1 - \frac{|S(y,\lambda^k)|}{\lambda^2|S(y,\lambda^{k-1})|}$ si mantiene, al variare di k, maggiore di una costante positiva indipendente da k; da ciò segue la equivalenza tra le serie b) e c).

Per dimostrare l'equivalenza tra c) e d) confrontiamo anzitutto la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}\mathscr{C}(P'_k)}{|S(y,\lambda^k)|}$ di c) con l'integrale

$$(9) \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{2t}\mathscr{C}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|}\,dt.$$

Si può scrivere:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{2t}\mathscr{C}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{\lambda^{2t}\mathscr{C}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|}\,dt.$$

Tenendo presente la proprietà di duplicazione per d, avremo che: esiste $C>0$, indipendente da k, tale che, per ogni $t\in[k, k+1]$,

$$\frac{\lambda^{2t}\mathscr{C}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|} \leq \frac{\lambda^{2k}\mathscr{C}(P'_k)}{|S(y,\lambda^{k+1})|} \leq C\,\frac{\lambda^{2k}\mathscr{C}(P'_k)}{|S(y,\lambda^k)|}$$

ed inoltre, esiste C' tale che:

$$\frac{\lambda^{2t}\mathscr{C}(P'_t)}{|S(y,\lambda^t)|} \geq \frac{\lambda^{2k+2}\mathscr{C}(P'_{k+1})}{|S(y,\lambda^k)|} \geq C'\,\frac{\lambda^{2k+2}\mathscr{C}(P'_{k+1})}{|S(y,\lambda^{k+1})|}$$

Queste due disuguaglianze provano l'equivalenza tra la serie c) e l'integrale (9); d'altra parte, la sostituzione $\rho = \lambda^t$ muta l'integrale (9) nell'integrale d); ciò conclude la dimostrazione.

Una presentazione del criterio di Wiener in questa forma integrale è stata data, per una classe di operatori ellittici, da Littman-Stampacchia-Weinberger [L-S-W], e, per una diversa classe di operatori da Fabes-Jerison-Kenig [F-J-K].

2) DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI "CAPACITA"

Abbiamo definito, nella formula (4) la "capacità" relativa ai nostri operatori L; ripetiamo quella definizione, indicando ora con "$\mathscr{C}_1$" la capacità:

(10) $\mathscr{C}_1(F) = \sup\{\mu(F) | \mu \quad M^+(F);\ G\mu \leq 1 \text{ in } \Sigma\}.$

Diamo ora altre due definizioni ($\mathscr{C}_2$ e $\mathscr{C}_3$) che dimostreremo essere e-

qivalente alla definizione di $\mathscr{C}_1$.

Sia $\mu \in M^+(F)$, F compatto $\subseteq \Sigma$. Chiamiamo "energia totale di μ" il numero $I\mu = \int_{\Sigma\times\Sigma} g(x,y)\, d\mu(x)\, d\mu(y)$; e poniamo:

(11) $$\mathscr{C}_2(F) = \sup\{\frac{1}{I\mu} \mid \mu \in M^+(F) : \mu(F) = 1\}$$

Una terza definizione di "capacità" richiede l'uso di un opportuno spazio funzionale che indicheremo H_A il quale, nel caso in cui L sia ellittico, coincide con $H^1_0(\Sigma)$.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti della parte principale di L. Poniamo, per ogni $u \in C^\infty_0(\Sigma)$.

(12) $$\|u\| = (\int_\Sigma (u^2(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j u(x))dx)^{\frac{1}{2}}$$

Poiché A è SEMI DEFINITA POSITIVA, $\|\cdot\|$ è una NORMA su $C^\infty_0(\Sigma)$; definiamo H_A il COMPLETAMENTO di $C^\infty_0(\Sigma)$ rispetto a tale norma. Si prova facilmente che

$$H^1_0(\Sigma) \quad H_A \quad L^2(\Sigma)$$

Inoltre, utilizzando una disuguaglianza del tipo di Poincaré, recentemente dimostrata da Jerison, si dimostra che una NORMA EQUIVALENTE su H_A è:

(13) $$\|u\|_{H_A} = (\int_\Sigma \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, \partial_i u\, \partial_j u\, dx)^{\frac{1}{2}}$$

(in effetti, per applicare la disuguaglianza di Jerison occorre che Σ sia contenuto in una d-sfera di raggio sufficientemente piccolo; questo non provoca alcuna difficoltà riguardo alle nostre applicazioni (criterio di Wiener, ecc.) in quanto il problema della regolarità dei punti è di carattere locale).

Definiamo per F compatto $\subseteq \Sigma$,

(14) $\mathscr{C}_3(F) = \inf\{\|u\|^2_{H_A} \,\big|\, u \in C_0^\infty(\Sigma)\ ;\ u \geq 1 \text{ in } F\}$

Dimostreremo che $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_3$ (per quanto riguarda $\mathscr{C}_3$, occorre fare l'ipotesi supplementare di L autoaggiunto). Premettiamo alcune osservazioni:

1). ESISTE $\mu_1 \in M^+(F)$ tale che $G\mu_1 \leq 1$ su Σ, e $\mu_1(F) = \mathscr{C}_1(F)$; μ_1 è la *misura di equilibrio* di F, e $G\mu_1$ il *potenziale di equilibrio* di F

2) ESISTE $\mu_2 \in M^+(F)$ tale che $\mu_2(F) = 1$, e $\frac{1}{I\mu_2} = \mathscr{C}_2(F)$.

3) ESISTE $u_3 \in H_A$ tale che $u_3 = 1$ in F nel senso di H_A, e $\|u_3\|^2_{H_A} = \mathscr{C}_3(F)$. Inoltre, se L è autoaggiunto, esiste μ_3 $M^+(F)$ con supporto ∂F, tale che $Lu_3 = -\mu_3$ nel senso delle distribuzioni, e $\mu_3(F) = \mathscr{C}_3(F)$.

Ammessi i risultati 1), 2), 3), proviamo che $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2 = \mathscr{C}_3$

1) $\mathscr{C}_1(F) \leq \mathscr{C}_2(F)$

Se $\mathscr{C}_1(F) = 0$ non c'è nulla da provare. Supponiamo perciò $\mathscr{C}_1(F)>0$, e sia $\nu_1 = \frac{1}{\mu_1(F)}\mu_1$. Allora $\nu_1(F) = 1$, e si ha:

$$I\nu_1 = \frac{1}{(\mu_1(F))^2}\int_\Sigma G\mu_1(x)d\mu_1 \leq \frac{1}{\mu_1(F)} = \frac{1}{C_1(F)},$$

tenendo presente che $G\mu_1 \leq 1$ in Σ; quindi $\mathscr{C}_1(F) \leq \frac{1}{I\nu_1} \leq \mathscr{C}_2(F)$.

2) $\mathscr{C}_2(F) \leq \mathscr{C}_1(F)$

Come in 1) possiamo supporre $\mathscr{C}_2(F) > 0$. Sia μ_2 tale che $\frac{1}{I\mu_2} = \mathscr{C}_2(F)$, e $\mu_2(F)=1$.

SI DIMOSTRA che $G\mu_2(x) \leq I\mu_2$; ammesso ciò, poniamo $\nu_2 = \frac{\mu_2}{I\mu_2}$, avremo $G\nu_2 \leq 1$ in Σ, quindi, $\nu_2(F) \leq \mathscr{C}_1(F)$; ma $\nu_2(F) = \frac{\mu_2(F)}{I\mu_2} = \frac{1}{I\mu_2} = \mathscr{C}_2(F)$; perciò, $\mathscr{C}_2(F) \leq \mathscr{C}_1(F)$

3) $\mathscr{C}_3(F) \leq \mathscr{C}_1(F)$.

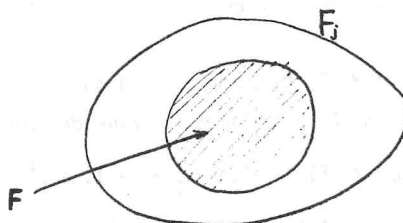
Poiché $\mathscr{C}_3(F) = \mu_3(F)$, e $G\mu_3 = u_3 \leqq 1$ in Σ, risulta $\mathscr{C}_3(F) = \mu_3(F) \leq \mathscr{C}_1(F)$.

4) $\mathscr{C}_1(F) \leq \mathscr{C}_3(F)$

Siano F_j , $j \in N$,
compatti tali che

$F \quad \text{int}\, F_j \subseteq F_j \subseteq F_{j+1} \subseteq \Sigma$;

siano μ_j e u_j le misure e i potenziali di equilibrio di F_j *relativi a* $\mathscr{C}_3$ (dunque, $u_j = G\mu_j$, e $Lu_j = -\mu_j$ in $\mathscr{D}'(\Sigma)$).

Essendo supp $\mu_j \subseteq \partial F_j$, le u_j sono ARMONICHE, quindi CONTINUE in int F_j, e perciò in F. Poiché è $u_j = 1$ in F_j "nel senso di H_A", avremo ora (in senso puntuale) $u_j(x) = 1 \;\; \forall x \in F, \;\; \forall j \in N$. Allora, indicati con V_F e μ_F il potenziale e la misura di equilibrio di F *relativi a* $\mathscr{C}_1$, sarà $u_j \geqq V_F$, cioè $G\mu_j \geqq G\mu_F$; da ciò segue $\mu_j(F_j) \geqq \mu_F(F)$ ovvero $\mathscr{C}_3(F_j) \geqq \mathscr{C}_1(F)$. Ma poiché risulta $\mathscr{C}_3(F) = \inf_{j \in N} \mathscr{C}_3(F_j)$, dovrà essere anche $\mathscr{C}_3(F) \geqq \mathscr{C}_1(F)$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI CITATI

[F-J-K] E. FABES, D. JERISON, C. KENIG: "The Wiener Test for Degenerate Elliptic Equations". Ann. Inst. Fourier 32 (1982), 151-182.

[J] D. JERISON: "The Poincaré Inequality for Vector Fields satisfying Hörmander's Condition". Duke Math. J. 53 (1986).

[L-S-W] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA, H . WEINBERGER: "Regular points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients". Ann. S.N.S. Pisa 17 (1963), 46-79.

[N-S-W] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER: "Balls and Metrics Defined by Vector Fields. I: Basic Properties". Acta Math. 155 (1985), 103-147.

[N] P. NEGRINI: "Some Remarks on Capacity and the Wiener Test for Degenerate Elliptic Operators". In corso di pubblicazione sul Bollettino U.M.I.

[N-S] P. NEGRINI, V. SCORNAZZANI: "Wiener Criterion for a Class of Degenerate Elliptic Operators". Journal of Diff. Eq. 66 (1987), 151-164.

(Per una bibliografia più completa, si rimanda a [N]).